OPTIONS M ET P' - 2ÈME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

- L'énoncé de cette épreuve commune aux candidats des options M et P' comporte 4 pages -

---

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

Dans le problème, sauf mention expresse du contraire, les espaces vectoriels considérés sont réels, de dimension finie, non réduits à {0}.

A condition qu'ils l'indiquent explicitement, les candidats pourront admettre tout résultat qu'ils n'auront pas su démontrer.

La clarté et la concision de la rédaction seront des éléments très importants de l'appréciation du correcteur.

La partie III est indépendante des parties I et II.

NOTATIONS ET DEFINITIONS

0.1. $\mathbb{R}_+$ (respectivement $\mathbb{R}_+^*$) désigne l'ensemble des réels positifs (respectivement strictement positifs).

0.2. Soient E un espace vectoriel, A, B des parties de E, Λ une partie de $\mathbb{R}$, λ_0 un réel, x un vecteur de E. On note :

A + B l'ensemble des sommes a + b lorsque a décrit A, b décrit B ;

Λ . A l'ensemble des vecteurs λa lorsque a décrit A , λ décrit Λ ;

λ_0. A pour $\{\lambda_0\}$.A ; $\mathbb{R}.x_0$ pour $\mathbb{R}.\{x_0\}$.

0.3. Soit E un espace vectoriel. Si $(a,b) \in E^2$, on appelle segment d'extrémités a et b, et l'on note [a, b], l'ensemble des vecteurs $ta + (1-t)\,b$ lorsque t décrit le segment [0,1] de $\mathbb{R}$. Si A est une partie de E, on dit que A est convexe si :
$(\forall\ (a, b) \in A^2)\ ([a, b] \subset A)$.

0.4. Soient E un espace vectoriel, A une partie convexe de E, a un point de A. On dit que a est extrêmal dans A si le complémentaire de {a} dans A est convexe. On note $\mathcal{E}(A)$ l'ensemble des points extrêmaux du convexe A.

0.5. Soit (E, ν) un espace vectoriel normé. On note : $B_\nu = \{x \in E \mid \nu(x) \leqslant 1\}$ la boule unité fermée de (E, ν), et : $S_\nu = \{x \in E \mid \nu(x) = 1\}$ la sphère unité de (E, ν).

0.6. Un plan est un espace vectoriel de dimension 2.

0.7. Une application f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite convexe si :
$(\forall\ (a,b) \in I^2)\ (\forall\ t \in [0,1])\ \big(f(ta + (1-t)\,b) \leqslant t\,f(a) + (1-t)\,f(b)\big)$.

PARTIE I

I.1. Soient E un espace vectoriel, A une partie convexe de E, a un point de A. Montrer l'équivalence : $a \in \mathcal{E}(A) \iff (\forall (a_1,a_2) \in A^2)\ ((a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)) \Longrightarrow (a_1 = a_2))$.

I.2. Soit (E, ν) un espace vectoriel normé.

(a) Montrer que B_ν est convexe, et que l'on a : $\mathcal{E}(B_\nu) \subset S_\nu$.

(b) Montrer l'équivalence :
$\mathcal{E}(B_\nu) \neq S_\nu \iff$ Il existe, dans E, a et b distincts, tels que : $[a,b] \subset S_\nu$.

(c) Donner un exemple simple où : $\mathcal{E}(B_\nu) \neq S_\nu$.

I.3. Soient f, g des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose : f convexe ; g affine ; $f(1) = g(1)$; $f \leqslant g$ (c'est-à-dire $f(u) \leqslant g(u)$ pour tout u dans $\mathbb{R}_+$). Montrer que f est égale à g.

I.4. Soit n un entier $\geqslant 1$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne canonique (qui est définie par : $\| (x_1,\ldots,x_n) \| = [\sum_{i=1}^{n} x_i^2]^{1/2}$).
On considère une partie C de $\mathbb{R}^n$, convexe, fermée, bornée, d'intérieur non vide, et symétrique (c'est-à-dire $(\forall x \in C)\ (-x \in C)$).

(a) Montrer que C est voisinage de 0 [Utiliser que C est convexe symétrique d'intérieur non vide].

(b) Soit x dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } x \in \lambda.C\}$ n'est pas vide [Utiliser (a)].
On pose alors, pour u dans $\mathbb{R}^n$; $j_C(u) = \inf \{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \mid u \in \lambda.C\}$.

(c) Montrer que j_C est une norme sur $\mathbb{R}^n$, qui vérifie :

$$\{ x \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ et } j_C(x) < 1 \} \subset C \subset \{ x \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ et } j_C(x) \leqslant 1 \}$$

En déduire que l'on a : $C = B_{j_C} = \{ x \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ et } j_C(x) \leqslant 1 \}$.

PARTIE II

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel E. Si ν est une norme sur E, on note $(\mathcal{P}_\nu)$ l'énoncé suivant :

Si des vecteurs x, y de E vérifient : $\nu(x + y) = \nu(x) + \nu(y)$, ces vecteurs sont liés.

[c'est-à-dire :

$$(\forall (x,y) \in E^2) \left\{ [\nu(x + y) = \nu(x) + \nu(y)] \Longrightarrow [(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2)\ ((a,b) \neq (0,0) \text{ et } (ax + by = 0))] \right\}.$$

On se propose de démontrer l'équivalence des énoncés (A) et (B) suivants :

(A) Toute norme ν sur E qui vérifie $(\mathcal{P}_\nu)$ est euclidienne.
(B) E est de dimension 1.

II.1. Montrer : (B) $\Longrightarrow$ (A).

II.2. Soit ν une norme sur E. On note (1) l'énoncé (ν vérifie $(\mathcal{P}_\nu)$)
et (2) l'énoncé ($\mathcal{E}(B_\nu) = S_\nu$).

(a) Montrer : (1) $\Longrightarrow$ (2).

(b) On suppose : (2), et l'on considère des vecteurs u, v de E, non nuls, tels que : $\nu(u) = 1$, et : $\nu(u + v) = 1 + \nu(v)$. Soient f, g les applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, définies par : $f(t) = \nu(u + tv)$; $g(t) = \nu(u) + t\,\nu(v)$.

A l'aide de I.3., montrer : f = g.
En déduire que : $w = \frac{v}{\nu(v)}$ vérifie : $w \in S_\nu$, et : $\nu(u + w) = \nu(u) + \nu(w)$.

Montrer alors l'égalité : w = u.

(c) Déduire de (b) l'implication : (2) $\Longrightarrow$ (1), c'est-à-dire l'équivalence : (1) $\Longleftrightarrow$ (2

II.3. Soient P un plan, et ν une norme euclidienne sur P. On considère une base (e_1, e_2) de telle que : $e_1 \in S_\nu$; $e_2 \notin S_\nu$. Montrer qu'il existe un réel a vérifiant : $-1 < a < 1$, et : S_ν est l'ensemble des vecteurs $x_1 e_1 + x_2 e_2$, où les réels x_1 et x_2 sont tels que $x_1^2 + x_2^2 + 2a\, x_1\, x_2 = 1$.

II.4. On considère l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique (cf. I.4.), et la partie B de $\mathbb{R}^2$ égale à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 1 \text{ et } |y| \leqslant 1 - x^2\}$.

(a) Montrer que B est une partie symétrique, fermée, bornée, d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$

(b) Montrer que B est convexe.

(c) Déterminer S_ν lorsque $\nu = j_B$ de $\mathbb{R}^2$ (cf. I.4.(b)). Déduire de II.3 que j_B n'est pa euclidienne.

(d) Montrer que $(\mathcal{P}_\nu)$ est vérifié lorsque $\nu = j_B$

II.5. On suppose que la dimension de E est strictement supérieure à 2, on donne un plan P de un supplémentaire Q de P dans E, une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ de Q, une norme ν sur P ; on note p la projection de E sur P parallèlement à Q.

Pour x vecteur de E, on pose : $x - p(x) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i\, e_i$, ainsi que :

$$\|x\| = \left[(\nu(p(x)))^2 + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^2 \right]^{1/2}.$$

(a) Montrer que $\| \ \|$ est une norme sur E.

(b) Montrer que, si ν n'est pas euclidienne, $\| \ \|$ n'est pas euclidienne.

(c) Montrer que, si ν vérifie $(\mathcal{P}_\nu)$, $\| \ \|$ vérifie $(\mathcal{P}_{\| \ \|})$.

II.6. Déduire des questions II.4., et II.5, l'implication : (A) $\Longrightarrow$ (B), et conclure.

PARTIE III

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel normé, (E, ν), et l'on se propose de démontrer l'équivalence des énoncés (C), (D), (E), (F) suivants :

(C) ν est euclidienne.

(D) Pour tout plan P de E, il existe une forme bilinéaire symétrique sur P : ϕ_P , qui vérifie : $(\forall\, x \in P)\ (\nu^2(x) = \phi_P(x,x))$.

(E) $(\forall\, (x,y) \in E^2)\ (\nu^2(x) + \nu^2(y) \leqslant \frac{1}{2}\ [\nu^2(x+y) + \nu^2(x-y)])$.

(F) $(\forall\, (x,y) \in E^2)\ (\nu^2(x) + \nu^2(y) = \frac{1}{2}\ [\nu^2(x+y) + \nu^2(x-y)])$.

[Dans les expressions ci-dessus, pour alléger l'écriture, ν^2 désigne le carré numérique de l'application ν].

III.1. Montrer les implications : (C) $\Longrightarrow$ (D) ; (D) $\Longrightarrow$ (E) ; (E) $\Longrightarrow$ (F).

III.2. On suppose : (F), et l'on introduit l'application ϕ de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4}\ [\nu^2(x + y) - \nu^2(x - y)].$$

(a) Pour x, y, z vecteurs de E, montrer les égalités :

$2\,[\nu^2(x+y) + \nu^2(x)] = \nu^2(2x+y) + \nu^2(y)$; $2\,[\nu^2(x-y) + \nu^2(x)] = \nu^2(2x-y) + \nu^2(y)$;

$\phi(2x,y) = 2\,\phi(x,y)$; $\phi(x+z, y) = \phi(x, y) + \phi(z, y)$.

(b) Déduire de ce qui précède que ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, et conclure : (F) $\Longrightarrow$ (C).

III.3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension $\geqslant 2$.

Pour x vecteur non nul de E, et P plan de E, on pose :

$$\pi_{P,x} = \{\, y \in P \mid \nu^2(x+y) = \nu^2(x) + \nu^2(y) \,\}$$

Montrer l'équivalence de (C) et de l'énoncé :

(G) Pour tout plan P de E, pour tout vecteur non nul x de P, $\pi_{P,x}$ est une droite vectorielle.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail